

FS1111

Leyes de Newton: Aplicaciones

Mario I. Caicedo

Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar

Índice

1. Introducción	2
2. Fuerzas de Contacto I	3
3. Acción a Distancia	4
4. Ejemplos sencillos	5
5. Fuerzas de reacción II	7

6. Dos problemas fundamentales	9
7. VINCULOS	12
7.1. La cuerda inextensible	20
8. Otras condiciones subsidiarias	21
8.1. Cadena de eslabones	22
8.2. La cuerda sin masa	25
8.3. Poleas	27
9. Más aplicaciones de las leyes de Newton	28
9.1. Poleas y ventaja mecánica	34
9.2. Rozamiento	36

1. Introducción

Ya hemos estudiado las leyes de Newton y su significado y las hemos utilizado para el estudio de algunos problemas que podrían lucir algo académicos.

En este material vamos a estudiar algunas aplicaciones que seguramente le lucirán algo más convencionales (más cercanas a la ingeniería). Para ello debemos familiarizarnos con la idea simplificada de fuerza, pero antes quisieramos contarle un poco lo que nos interesa a los físicos y que nos atrevemos a apostar, despertará su curiosidad.

Los físicos pensamos en la naturaleza y nos preocupamos particularmente por estudiar los constituyentes últimos de la materia y sus interacciones mutuas. Estas inquietudes se remontan

-desde el punto de vista occidental- a los griegos, siendo Leucipo y Demócrito quienes sistematizaron la idea de átomo como constituyente último e indivisible de la materia aproximadamente en el año 450 AC. Los experimentos más modernos acerca de la materia y las teorías que pretenden explicarlos apuntan a la existencia de solo tres clases totalmente distintas de partículas, los *Quarks* y los *Leptones* forman la materia, mientras que las partículas que pertenecen al tercer grupo, denominadas colectivamente *bosones de intercambio* son los responsables de las interacciones (fuerzas) entre los quarks y leptones. Por otra parte, aparentemente solo existen tres tipos de fuerzas distintas: fuerza gravitacional, fuerza electro-debil y fuerza fuerte.

Desde el punto de vista de las interacciones entre cuerpos macroscópicos, las fuerzas son siempre de tipo electromagnético, pero ese nivel de detalle en la descripción es totalmente irrelevante, así que lo que necesitamos es algún modelo simplificado para las fuerzas de interacción entre cuerpos macroscópicos.

2. Fuerzas de Contacto I

Las primeras fuerzas a que haremos referencia son las de contacto (una mano que empuja una caja es un buen ejemplo de una fuerza de contacto que la mano ejerce sobre la caja). El contacto entre dos cuerpos se manifiesta en la aparición de fuerzas que se denominan reacciones o fuerzas de contacto.

Con el fin de tratar un ejemplo explícito que usted mismo pueda experimentar, permítanos comentar que el sentido del tacto está relacionado con la capacidad de percibir las fuerzas de contacto entre nuestro cuerpo y los objetos que tocamos. Dicho esto coloque la palma de su mano justo en frente -pero sin tocar- la superficie de una pared. Si usted entra en contacto

muy suavemente con la pared percibirá la presencia de esta a través del tacto, es decir, por la aparición de la reacción de la pared sobre su mano \mathbf{A}_{mp} , la tercera ley de Newton establece que la pared ejerce sobre su mano una fuerza (\mathbf{A}_{pm}) de la misma magnitud dirección y sentido que \mathbf{A}_{mp} pero de sentido opuesto a esta y que, no nos cansaremos de insistir en esto, no actúa sobre la pared sino sobre su mano.

3. Acción a Distancia

La mecánica Newtoniana reconoce la existencia de fuerzas que actúan sin necesidad de que exista contacto entre los cuerpos. Entre estas, la fuerza que Newton estudió personalmente es la fuerza de gravedad, la fuerza de gravedad de Newton, denominada Gravitación Universal, es universal en el sentido de que se establece entre cualesquiera par de cuerpos masivos.

Lo que denominamos nuestro peso no es otra cosa que la fuerza gravitacional con que la tierra atrae a nuestro cuerpo, en la superficie terrestre el peso de un objeto es una fuerza paralela a la dirección que indica una plomada (que denominamos: vertical), tiene sentido hacia la superficie de la tierra y tiene por magnitud mg donde m es la masa del objeto y $g \approx 9,78 \text{ m/s}$ es la aceleración de gravedad.

Cuando un cuerpo de masa m se encuentra a una altura h (en Km) sobre el nivel del mar, la fuerza gravitacional que la tierra ejerce sobre este está dirigida muy aproximadamente hacia el centro de la tierra y tiene una magnitud muy cercana a

$$F_G = G \frac{mM_T}{(R_T + h)^2}, \quad (1)$$

donde $G = (6,67428 \pm 0,00067) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ Kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ es una constante denominada constante de

gravitación de Newton, $R_T = 6371,0 \text{ Km}$ el radio (medio) terrestre y $M_T = 5,9736 \times 10^{24} \text{ Kg}$ la masa de la tierra.

Otros ejemplos de fuerzas a distancia son las interacciones electricas y magnéticas.

4. Ejemplos sencillos

Ejemplo 1 *Una caja está colocada sobre una superficie horizontal (una mesa por ejemplo). ¿Cual es la reacción de la superficie sobre la caja?.*

La respuesta a la pregunta ni siquiera requiere de un gráfico. Solo hay dos fuerzas que actúan sobre la caja, la atracción gravitacional que la tierra ejerce sobre la caja (el peso de la caja) y la fuerza de reacción $\mathbf{\Lambda}_{sc}$ que la superficie ejerce sobre la caja.

De acuerdo a la situación descrita, la caja se mueve a velocidad constante (nula según un observador inercial fijo a tierra) y por lo tanto la ecuación de movimiento del sistema es:

$$\mathbf{\Lambda}_{sc} + \mathbf{W} = 0, \quad (2)$$

donde \mathbf{W} es el peso de la caja. En definitiva, en este caso la fuerza de reacción que la superficie horizontal ejerce sobre el piso está dada por

$$\mathbf{\Lambda}_{sc} = -\mathbf{W}, \quad (3)$$

Ejemplo 2 *Introduzcamos una ligera modificación al problema anterior permitiendo que la superficie tenga un cierto ángulo de inclinación $\theta \leq 90^\circ$ con respecto a la horizontal.*

Una vez más, solo actúan dos fuerzas, el peso y la reacción y una vez más se obtiene

$$\mathbf{\Lambda}_{sc} = -\mathbf{W}, \quad (4)$$

Pues bien, parece que el autor de estas notas es realmente bobo, repitió el mismo ejemplo dos veces.

¡Al contrario!, estoy pensando en usted -un estudiante típico- y su “maña” de aprender oraciones resumen que solo le confunden. Que tal esta joya : “la normal es igual al peso”.

Los dos ejemplos están diseñados para hacerle olvidar eso. Consideremos el primer caso y utilicemos como base un triedro en que los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 se encuentran en el plano horizontal y \hat{e}_3 es vertical y en sentido hacia arriba. Bajo estas condiciones podemos poner $\mathbf{W} = -Mg\hat{e}_3$ y por lo tanto

$$\mathbf{\Lambda}_{sc} = Mg\hat{e}_3, \quad (5)$$

es decir, la reacción de la superficie sobre la caja es una fuerza de contacto vertical (ortogonal a la superficie de contacto), de magnitud Mg y orientada hacia arriba. Esto es completamente distinto del peso que, para empezar, es una fuerza de acción a distancia

En el segundo ejemplo algunas cosas son idénticas. La fuerza de reacción $\mathbf{\Lambda}_{sc}$ termina siendo una fuerza vertical orientada hacia arriba y de magnitud Mg . Sin embargo, en este caso aparece una diferencia significativa: la reacción $\mathbf{\Lambda}_{sc}$ no es ortogonal a la superficie de contacto.

Consideremos una base dextrogira dos de cuyos elementos son (i) un versor (\hat{e}_\perp) ortogonal a la superficie orientado hacia arriba y (ii) un versor (\hat{e}_\parallel) paralelo a la dirección de máxima pendiente de la superficie y en sentido hacia abajo, esto nos permite expresar al peso como

$$\mathbf{W} = Mg \left(-\cos\theta \hat{e}_\perp + \text{sen}\theta \hat{e}_\parallel \right), \quad (6)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{\Lambda}_{sc} = \lambda_\parallel \hat{e}_\parallel + \lambda_\perp \hat{e}_\perp = Mg \left(\cos\theta \hat{e}_\perp - \text{sen}\theta \hat{e}_\parallel \right). \quad (7)$$

Leamos nuestro resultado interpretándolo cuidadosamente. La reacción que la superficie ejerce sobre la caja tiene una componente perpendicular a la superficie ($\lambda_{\perp} = Mg\cos\theta$) y una componente tangencial a la superficie de contacto ($\lambda_{\parallel} = -Mg\sin\theta$). En vista de que las cantidades $Mg\cos\theta$ y $Mg\sin\theta$ son números reales positivos, los signos en λ_{\parallel} y λ_{\perp} tienen un importante significado físico, expresan el hecho de que la reacción debe oponerse al peso para lograr el equilibrio de fuerzas necesario para que la aceleración de la caja sea nula.

Volviendo al problema de las “oraciones resumen”, el vector $Mg\cos\theta\hat{e}_{\perp}$ es lo que usualmente recibe el indeseable apelativo de *normal*. Y en el segundo ejemplo, no solo ocurre que el peso y la componente de la reacción ortogonal a la superficie de contacto son objetos conceptualmente distintos, sino que por añadidura tienen magnitudes diferentes. Así que recuerde (si es que insiste en memorizar oraciones bobas):

LA NORMAL NO ES, NO HA SIDO, NI SERÁ NUNCA IGUAL AL PESO

5. Fuerzas de reacción II

Retomemos el estudio de las fuerzas de contacto, para ello consideremos el caso más general posible, una partícula que se mueve sobre una superficie arbitraria. Nuestro estudio requiere de un resultado matemático que no podemos demostrar con las herramientas que tenemos a mano, así que enunciaremos el resultado apelando a su intuición para entenderlo y aceptarlo por el momento y esperando algún curso de matemáticas más avanzado para obtener su demostración rigurosa.

Teorema 1 *Toda superficie suave admite un plano tangente en cada uno de sus puntos.*

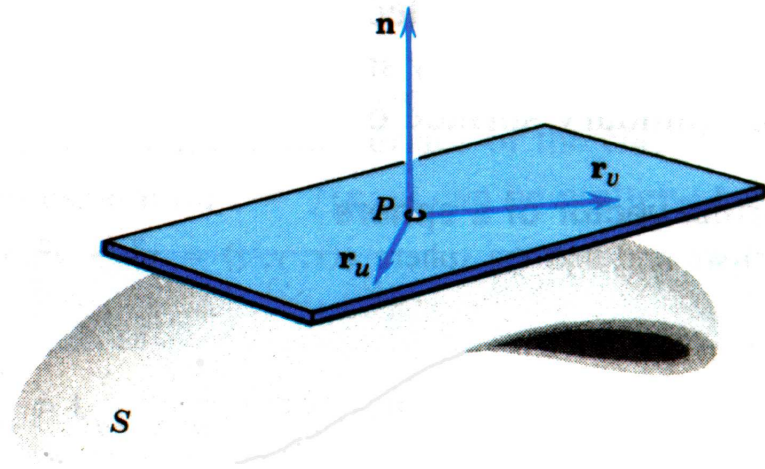


Figura 1: El plano tangente a la superficie S en el punto P . Los versores $\hat{\mathbf{r}}_u$, $\hat{\mathbf{r}}_v$ y $\hat{\mathbf{n}}$ forman un triedro ortonormal dextrogiro en el punto P

En vista del teorema 1, en cada punto de una superficie suave podemos conseguir un versor normal a la superficie (normal al plano tangente) y siempre podremos fijar dos vectores unitarios en el plano tangente que sean ortogonales entre si.

Como consecuencia de la existencia de los tres versores que acabamos de mencionar, cuando una partícula se mueve sobre una superficie, en cada punto de la superficie la fuerza de reacción que la superficie ejerce sobre la partícula podrá expresarse en la forma

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}, \quad (8)$$

donde $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ es el versor normal a la superficie en el punto que estemos considerando, y $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ es un versor contenido en el plano tangente a la superficie en dicho punto. Es facil darse cuenta de que esta representación de la fuerza de contacto no es más que una generalización de lo que estudiamos en el ejemplo (2)

El sumando $\lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ que aparece en la fórmula (8) es lo que usualmente denominamos *la normal* mientras que el término $\lambda_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ es lo que conocemos como fuerza de roce.

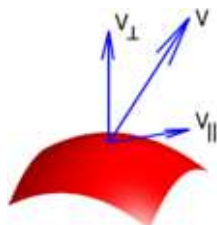


Figura 2: La descomposición de un vector (\mathbf{v}) con origen en un punto de una superficie en sus componentes normal (\mathbf{v}_{\perp}) y tangente (\mathbf{v}_{\parallel}) a la superficie

6. Dos problemas fundamentales

Antes de ir a las aplicaciones prácticas, queremos entender un poco más la estructura del siguiente problema:

Problema 1 *Conocidas la masa de una partícula, su velocidad y posición en un instante arbitrario t_0 y la naturaleza y forma de las fuerzas que actúan sobre la partícula encuentre la ley horaria de la partícula*

La resolución de este problema comienza por establecer el observador y la base ortonormal para escribir la ecuación de movimiento

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}, \quad (9)$$

donde \mathbf{F} es la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula en términos de tres ecuaciones escalares

$$\ddot{x}_1 = F_1/m \tag{10}$$

$$\ddot{x}_2 = F_2/m \tag{11}$$

$$\ddot{x}_3 = F_3/m, \tag{12}$$

donde obviamente los subíndices indican las componentes de los vectores aceleración y fuerza neta en la base que se halla escogido.

Desde un punto de vista matemático el problema planteado corresponde a resolver un sistema de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden sometidas a ciertas condiciones iniciales. Este es un problema sumamente difícil que en general carece de soluciones analíticas. Este es el problema fundamental de la mecánica de Newton.

Un segundo problema de mayor interés -por ser más realista- consiste en lo siguiente

Problema 2 *Resolver las ecuaciones de movimiento para dos partículas que interactúan entre sí y sobre las que el entorno ejerce fuerzas.*

Un ejemplo explícito muy sencillo de un problema así podría ser estudiar dos cajas colocadas una sobre la otra con un roce mutuo bien caracterizado y colocar este sistema sencillo sobre un plano inclinado.

En general el problema de interacción entre dos partículas y su ambiente puede ser realmente formidable¹. Desde el punto de vista matemático el problema consiste en resolver seis

¹ pensemos en Adams y Leverrier, quienes -en el siglo XVIII- estudiando los movimientos de Urano predijeron la existencia de Neptuno

ecuaciones diferenciales de segundo orden sometidas a condiciones iniciales. Pongámonos las botas y tratemos de estudiar una versión algo más simple del problema.

Problema 3 Problema de dos partículas *Resuelva las ecuaciones de movimiento de un conjunto de dos partículas cuyas interacciones mutuas son conocidas*

La resolución del problema comienza por plantear las ecuaciones de movimiento de ambas partículas:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} \quad (13)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12}, \quad (14)$$

en donde \mathbf{F}_{12} es la fuerza que la partícula de masa m_1 ejerce sobre la partícula de masa m_2 y viceversa. Podemos sumar ambas ecuaciones utilizando la tercera ley de Newton para reexpresar el resultado como

$$(m_1 + m_2) \frac{m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0. \quad (15)$$

Ahora bien si multiplicamos a la primera ecuación por m_2 , a la segunda por m_1 y restamos los resultados obtenemos:

$$m_1 m_2 (\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2) = (m_1 + m_2) \mathbf{F}_{12}. \quad (16)$$

Observando la dimensionalidad de los objetos que aparecen, podemos reescribir el sistema de ecuaciones en la forma

$$M \ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (17)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{12} \quad (18)$$

donde: $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema formado por las dos partículas,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (19)$$

se denomina masa reducida del sistema,

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad (20)$$

recibe el nombre de vector de posición del centro de masa del sistema y $\mathbf{u} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la posición relativa de las dos partículas.

En resumen, el problema de dos partículas se puede convertir en un problema equivalente en que una partícula virtual cuya masa es la masa total del sistema se mueve a velocidad constante ($\ddot{\mathbf{R}} = 0$) mientras que otra partícula cuya masa es igual a la masa reducida del sistema se mueve bajo la acción de la fuerza de interacción entre las dos partículas originales. Para poder ir un poco más lejos necesitamos la forma explícita de la fuerza de interacción \mathbf{F}_{12}

Un ejemplo de aplicación directa de este problema y que posee un gran interés científico es el estudio del movimiento de dos cuerpos gravitantes en el supuesto de que los únicos objetos en el universo son los dos objetos (la tierra y la luna, ó el sol y la tierra ó, algo un poco más exótico un par de estrellas que forman un sistema binario).

7. VINCULOS

En algunos casos las tres leyes de la dinámica no son suficientes para determinar completamente el movimiento de un conjunto (sistema) de partículas. A menos que sepamos algunas cosas las tres leyes por si solas no son suficientes para describir el movimiento ya que a veces no

el número de incógnitas que aparecen en las ecuaciones de movimiento es mayor al número de ecuaciones. Así, pues, al estudiar problemas físicos a veces se hace necesario introducir algunas condiciones subsidiarias además de las leyes de Newton.

El conjunto más obvio de condiciones subsidiarias en que se puede pensar es en alguno que establezca algunas condiciones cinemáticas a priori. Por ejemplo, que la distancia entre las partículas del se mantiene constante en el tiempo.

las condiciones subsidiarias de tipo cinemático se denominan vínculos, ligaduras ó restricciones.

Definición 1 *Una ligadura ó vínculo es una relación² $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$ entre varias de las variables cinemáticas de un sistema*

Ejemplo 3 *El ejemplo más sencillo en que podemos pensar es en un punto del que se sabe que se mueve a lo largo de una línea recta. En efecto, dar esa información nos permite escoger una base ortonormal de tal suerte que el que el movimiento de la partícula está caracterizado por obedecer las condiciones $x_2(t) = 0$, $x_3(t) = 0$ de manera que la ley horaria de la partícula será de la forma $\vec{r}(t) = x_1(t) \hat{e}_1$.*

En este caso los vínculos son el par de condiciones

$$x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = 0. \quad (21)$$

Un ejemplo similar pero menos trivial consiste en discutir la dinámica de una partícula que se mueve en un plano, en este caso hay un solo vínculo, que escogiendo el sistema de referencia de

²los vínculos que relacionan a las coordenadas suelen llamarse ligaduras holónomas

manera adecuada se expresa como

$$x_3(t) = 0. \quad (22)$$

Si por alguna razón el sistema de referencia no fuera el más adecuado, podemos escoger un vector (\vec{A}) perpendicular al plano del movimiento y un punto (\vec{r}_0) en el plano, objetos en términos de los cuales, el vínculo adquiere la forma:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) = 0, \quad (23)$$

que no es otra cosa que la ecuación que asegura que el movimiento de la partícula ocurra en el plano ortogonal al vector \mathbf{A} que contiene al punto \mathbf{r}_0 .

Con el objetivo de ser completamente explícitos nos vamos a embarcar en el estudio de un problema relativamente sencillo. Le rogamos que estudie detalladamente todo el procedimiento, le pediremos algo de paciencia, ya que con fines pedagógicos vamos a presentar todo el desarrollo con profusión de detalles de forma que usted pueda seguir toda la línea argumental.

Por favor no se aburra por lo tedioso del razonamiento y por favor no entre en pánico pensando que la solución de hasta los problemas más sencillos requieren de desarrollos muy largos

No resolveremos el problema totalmente, sino que le llevaremos de la mano hasta el punto en que el problema sea muy cercano a ser soluble y en que aparecerán ante nosotros el conjunto de condiciones que harían falta convertirlo en un problema casi-soluble.

Ejemplo 4 *Imagine una situación física típica de lo que puede encontrar en un laboratorio.*

Considere un experimento en que dos carritos de masas m_1 y m_2 se deslizan a lo largo de un riel sin rozamiento. Sobre el carrito de masa m_1 actúa una fuerza horizontal de magnitud³

³recuerde que como F es una magnitud es un número real intrínsecamente positivo

F. Ambos carritos están unidos por una barrita horizontal.

Conociendo que de no estar la barrita, la fuerza aplicada sobre el primer cochecito trataría de alejarle del segundo, ¿cuales serán las fuerzas que la barrita ejerce sobre cada carrito?

Para comenzar a estudiar la situación debemos escoger un sistema de referencia al que asociaremos unos ejes cartesianos. La información concerniente a la geometría del riel y al movimiento de los cochecitos nos permite escoger el eje x_1 a lo largo del riel, lo que trae como consecuencia que las aceleraciones de ambos carritos tengan la forma:

$$\mathbf{a}_1^{(1)} = a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_2^{(1)} = a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (24)$$

en donde $a_1^{(1)}$ y $a_1^{(2)}$ las componentes de las aceleraciones de ambas partículas son números reales cuyos valores desconocemos totalmente. Dicho en otros términos, la información geométrica suministrada es equivalente al conjunto de restricciones⁴: $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = 0$ y $x_2^{(2)} = 0$ y $x_3^{(2)} = 0$.

Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre el primer cochecito son: la atracción que la tierra ejerce sobre este (es decir, el peso $\mathbf{W}^{(1)}$ de m_1), la fuerza de contacto $\mathbf{\Lambda}^{(1)}$ (reacción) de la pista sobre el carrito, la fuerza \mathbf{F} que se ejerce directamente sobre el mismo, y claro, la que la barrita ejerce sobre el carrito $\mathbf{F}^{(b1)}$.

Un razonamiento análogo, nos lleva a concluir que las fuerzas que actúan sobre el segundo carrito son el peso $\mathbf{W}^{(2)}$, la reacción del riel $\mathbf{\Lambda}^{(2)}$ y la fuerza ejercida por la barra $\mathbf{F}^{(b2)}$.

De acuerdo a esto, las ecuaciones de movimiento de ambos cochecitos son

$$\mathbf{\Lambda}^{(1)} + \mathbf{W}^{(1)} + \mathbf{F}^{(b1)} + \mathbf{F} = m_1 a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (25)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(2)} + \mathbf{W}^{(2)} + \mathbf{F}^{(b2)} = m_2 a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1, \quad (26)$$

⁴tres ligaduras holónomas

sin temer ser aburridores, debemos insistir en que, en estas ecuaciones $a_1^{(1)}$ y $a_1^{(2)}$ son incógnitas que representan las componentes de las aceleraciones de los carritos, y que por lo tanto son números reales, lo que implica que al final del cálculo resultaran siendo nulas o teniendo algún signo algebraico con respecto al cero.

Para proseguir nuestro estudio escogeremos al vector unitario \hat{e}_1 en sentido paralelo al de la fuerza horizontal que se está aplicando sobre m_1 , y al versor \hat{e}_2 con sentido opuesto al de la gravedad, de esta manera, debemos reescribir las ecuaciones de movimiento en la forma:

$$\left(\lambda_1^{(1)} + F_1^{(b1)} + F\right) \hat{e}_1 + \left(\lambda_2^{(1)} + F_2^{(b1)} - m_1 g\right) \hat{e}_2 = m_1 a_1^{(1)} \hat{e}_1 \quad (27)$$

$$\left(\lambda_1^{(2)} + F_1^{(b2)}\right) \hat{e}_1 + \left(\lambda_2^{(2)} + F_2^{(b2)} - m_2 g\right) \hat{e}_2 = m_1 a_1^{(2)} \hat{e}_1 \quad (28)$$

Veamos en detalle toda la información que, hasta el momento, hemos integrado a nuestro modelo matemático de la situación física.

En primer lugar, hemos utilizado el hecho de que la fuerza \mathbf{F} es horizontal, de magnitud F y orientada a lo largo de \hat{e}_1 . Hemos incorporado los cuatro vínculos $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = 0$ y $x_2^{(2)} = 0$ y $x_3^{(2)} = 0$ asociados a que sabemos a priori que los cochecitos se moverán a lo largo del riel. Por otra parte, de las reacciones y las fuerzas que la barrita ejerce sobre las masas solo hemos utilizado que son vectores que deben estar en el plano que contiene a los vectores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 lo que constituye una suposición que más que razonable, es evidente.

De esta manera, el sistema de ecuaciones escalares de movimiento es

$$\lambda_1^{(1)} + F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (29)$$

$$\lambda_2^{(1)} + F_2^{(b1)} - m_1 g = 0 \quad (30)$$

$$\lambda_1^{(2)} + F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (31)$$

$$\lambda_2^{(2)} + F_2^{(b2)} - m_2 g = 0 \quad (32)$$

Este es un sistema de 4 ecuaciones cuyas incógnitas: $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $F_1^{(b1)}$, $F_2^{(b1)}$, $a_1^{(1)}$, $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$, $F_1^{(b2)}$, $F_2^{(b2)}$ y $a_1^{(2)}$ constituyen un total de diez cantidades. En verdad debería haber seis (6) incógnitas más, pero el uso de los vínculos hizo desaparecer cuatro de ellas, mientras que la suposición acerca de que las reacciones se encuentran en el plano formado por los versores \hat{e}_1 y \hat{e}_2 las eliminó.

Ahora bien, los rieles no producen rozamiento sobre los carritos (esta es una condición aproximada que se debe al montaje experimental), sabemos bien que el rozamiento es solo la componente de la fuerza de reacción paralela a la superficie de contacto, lo que nos permite colocar de inmediato: $\lambda_1^{(1)} = 0$ y $\lambda_1^{(2)} = 0$.

Por otra parte, debemos insistir en que: de las fuerzas que la barra ejerce sobre los carritos solo podemos decir que sus componentes deben ser $F_1^{(b1)}$, $F_2^{(b1)}$, $F_1^{(b2)}$ y $F_2^{(b2)}$. No hay ninguna razón a priori para decir algo más. Sin embargo, veamos lo que ocurre si introducimos la siguiente hipótesis, las fuerzas ejercidas por la barra sobre los carritos son paralelas a la barra, esto es equivalente a decir que las fuerzas ejercidas por la barra sobre los carritos son horizontales, en cuyo caso deberíamos poner⁵ $F_2^{(b1)} = 0$ y $F_2^{(b2)} = 0$.

Tras introducir el argumento de ausencia de rozamiento y la hipótesis acerca de las fuerzas ejercidas por la barra hemos logrado eliminar (más bien: resolver) cuatro de las diez incógnitas dejándonos con el siguiente sistema de 4 ecuaciones con 6 incógnitas

$$F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (33)$$

$$\lambda_2^{(1)} - m_1 g = 0 \quad (34)$$

⁵Más adelante veremos que condiciones físicas permiten justificar esta hipótesis

$$F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (35)$$

$$\lambda_2^{(2)} - m_2 g = 0 \quad (36)$$

Antes de continuar debemos hacer un comentario sumamente importante. Las condiciones sobre las reacciones y las fuerzas ejercidas por las barras que ya hemos utilizado no son vínculos ya que no son condiciones cinemáticas. Las condiciones sobre las fuerzas aparecen asociadas a nuestro entendimiento acerca de la naturaleza de las fuerzas y no de de razonamientos cinemáticos.

Dos de las ecuaciones que hemos obtenido (las que nos permiten calcular las componentes no nulas de la reacción del riel sobre los carritos) se resuelven trivialmente resultando

$$\lambda_2^{(1)} = m_1 g \quad (37)$$

$$\lambda_2^{(2)} = m_2 g \quad (38)$$

Hemos reducido el problema al siguiente sistema de 2 ecuaciones con cuatro incógnitas (hemos colcado del lado derecho de las ecuaciones las cantidades conocidas, y del izquierdo las desconocidas (por supuesto que las masas son conocidas)

$$F_1^{(b1)} - m_1 a_1^{(1)} = F \quad (39)$$

$$F_1^{(b2)} - m_1 a_1^{(2)} = 0 \quad (40)$$

El sistema de ecuaciones que hemos logrado establecer es todo lo que podemos decir de la situación física que se nos planteó al principio. Como el número de incógnitas es mayor al de ecuaciones no podemos hacer nada más. Harían falta al menos dos condiciones subsidiarias extra que nos permitieran reducir el número de incógnitas a cuatro. Más adelante veremos que

es posible conseguir estas condiciones subsidiarias introduciendo un vínculo (la inextensibilidad de la cuerda), y una condición dinámica (despreciar ciertas masas)

Este ejemplo contiene una lección importantísima adicional. Si se siguen las reglas del juego (las leyes de Newton) juiciosamente y disciplinadamente, no hay manera de equivocarse. Usted llegará limpiamente a la solución de cualquier problema que le propongan -si este tiene solución. Un colega nuestro suele decir que para triunfar como científico no hay que ser inteligente, basta con ser bruto pero disciplinado.

Ejemplo 5 Repitamos el ejemplo anterior, solo que esta vez lo presentaremos tal y como aparecería en la literatura usual. A partir de un par de dibujitos y sin dar mayores explicaciones, el conjunto inicial de ecuaciones para el sistema hubiera tenido el siguiente aspecto

$$\lambda_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 - M_1 g \hat{\mathbf{e}}_2 + F_1^{(b1)} \hat{\mathbf{e}}_1 + F \hat{\mathbf{e}}_1 = m_1 a_1^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 \quad (41)$$

$$\lambda_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1 - M_2 g \hat{\mathbf{e}}_2 + F_2^{(b2)} \hat{\mathbf{e}}_1 = m_2 a_1^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_1. \quad (42)$$

Por supuesto que este resultado está bien, es solo que en el ejemplo anterior quisimos hacerle ver el detalle de todas las consideraciones que llevan a este primer conjunto de ecuaciones. De acá basta con reescribir el par de ecuaciones vectoriales en cuatro ecuaciones escalares y presto:

$$F_1^{(b1)} + F = m_1 a_1^{(1)} \quad (43)$$

$$\lambda_2^{(1)} - m_1 g = 0 \quad (44)$$

$$F_1^{(b2)} = m_1 a_1^{(2)} \quad (45)$$

$$\lambda_2^{(2)} - m_2 g = 0, \quad (46)$$

Todo muy corto y muy lindo. Entonces...¿para que fastidiar con el ejemplo anterior?. Pues para mostrarle todos y cada uno de los aspectos del razonamiento que llevó hasta este punto.

7.1. La cuerda inextensible

Continuemos estudiando una variación del ejemplo 4, la variante consiste en cambiar la barra que une los carritos por una *cuerda inextensible*.

Nuestro nuevo problema comienza por hacernos meditar acerca de la siguiente pregunta: ¿Qué contenido físico (si es que hay alguno) tiene el adjetivo “inextensible” cuando se aplica a la cuerda?.

Para contestar esta pregunta observemos que, si la longitud de la cuerda es ℓ , y las posiciones de las partículas son $x^{(1)}\hat{\mathbf{e}}_1$ y $x^{(2)}\hat{\mathbf{e}}_1$, las componentes de los vectores de posición de ambas partículas deben satisfacer la condición (una vez más, estamos frente a una ligadura holónoma)

$$x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t) = \ell. \quad (47)$$

En otras palabras, la condición de inextensibilidad de la cuerda constituye un vínculo. Ahora bien, la condición de inextensibilidad de la cuerda se puede expresar como un vínculo⁶ Podemos tomar la derivada del vínculo de inextensibilidad para obtener

$$\dot{x}^{(1)}(t) - \dot{x}^{(2)}(t) = 0. \quad (48)$$

Derivando una vez más terminamos demostrando que

$$a_1^{(1)}(t) = a_1^{(2)}(t), \quad (49)$$

⁶otra forma de expresar el vínculo consiste en notar, que como la cuerda tiene longitud constante, los desplazamientos que sufren las partículas deben ser iguales, esto es:

$$\Delta x^{(1)}(t) = \Delta x^{(2)}(t)$$

en definitiva, el vínculo de inextensibilidad nos permite eliminar una de las cuatro incógnitas del sistema de ecuaciones para quedar con el siguiente sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas (una discreta pero definitiva mejora con respecto a lo que ocurría en el ejemplo 4)

$$F_1^{(b1)} - m_1 a = F \quad (50)$$

$$F_1^{(b2)} - m_1 a = 0, \quad (51)$$

en donde, por claridad de la escritura, hemos puesto: $a_1^{(1)}(t) = a_1^{(2)}(t) = a$

En conclusión, la hipótesis de inextensibilidad de una cuerda es equivalente a un vínculo entre las aceleraciones de las partículas unidas por la cuerda. En el caso del ejemplo 4 en que estamos hablando de una barra tenemos la posibilidad de imaginar tanto extensiones como compresiones de la barra, la hipótesis de inextensibilidad debe sustituirse por la de absoluta rigidez (inextensibilidad e incompresibilidad) de la barra.

completamentar esta sección con datos de elongación de cuerdas....para mostrar que tan razonable es la hipótesis de de inextensibilidad

8. Otras condiciones subsidiarias

En el ejemplo 4 y su variante que estudiamos en la sección anterior utilizamos vínculos (relaciones entre las variables cinemáticas) para eliminar algunas de las incógnitas del sistema, además utilizamos la ausencia de rozamiento para eliminar las componentes de las reacciones del riel paralelas a este ($\lambda_{||}^{(1)}$ y $\lambda_{||}^{(2)}$) e introdujimos una hipótesis acerca de las componentes verticales de las fuerzas que la barra (o la cuerda) ejercen sobre los carritos, condiciones que no constituyen ligaduras porque involucran variables dinámicas.

En esta sección vamos a estudiar en detalle un conjunto de condiciones subsidiarias que

aparecen como consecuencia de condiciones físicas que por asociarse a variables dinámicas, no constituyen vínculos pero son necesarias para poder completar la resolución -al menos algebraica- de las ecuaciones de Newton.

8.1. Cadena de eslabones

Imaginemos a un astronauta que, en estado de ingravidez, juega con una cadena hal'andola por sus extremos, y sean \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_N las fuerzas que el astronauta ejerce sobre los extremos de la cadena. Ciertamente, en las condiciones que estamos describiendo, la cadena estará tensa y por lo tanto, los eslabones se alinearán a lo largo de alguna dirección. Para la situación que estamos considerando supondremos que la cadena consta de N eslabones de masas idénticas (M) y asignaremos a cada eslabón un índice identificador entero definido de tal suerte que el eslabón que constituye uno de los extremos será el eslabón #1, el que está en contacto con este será el número dos, continuando el orden creciente hasta llegar al N -ésimo eslabón que evidentemente constituye el otro extremo de la cadena. En la notación que vamos a utilizar, la fuerza que el m -ésimo eslabón ejerce sobre uno de sus vecinos será $\mathbf{F}_{m,m\pm 1}$ dependiendo de si estamos considerando la fuerza ejercida sobre el eslabón que le sigue o el que le precede en la cadena.

Consideremos ahora la dinámica de un eslabón del interior de la cadena (es decir, no estamos pensando en los eslabones que constituyen los extremos de la cadena), según la notación que hemos introducido,

$$\mathbf{F}_{j-1,j} + \mathbf{F}_{j+1,j} = M \mathbf{a}_j, \quad (52)$$

escojamos un versor $\hat{\mathbf{u}}$ paralelo a la dirección de la cadena y orientado en el sentido en que

aumenta la numeración de los eslabones. Es evidente que, dadas las condiciones del experimento (el astronauta está tensando la cadena y no hay aceleración transversal a la cuerda) podemos asegurar que: $\mathbf{a}_j = a_j \hat{\mathbf{u}}$ y que $\mathbf{F}_{j\mp 1,j} = \mp F_{j\mp 1,j} \hat{\mathbf{u}}$ (como la cadena está bajo tensión, los sentidos de las fuerzas que se ejercen sobre cada eslabón son opuestos) de manera que podemos poner:

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = M a_j, \quad (53)$$

en resumens, hemos sido capaces de construir las ecuaciones de movimiento para todos los eslabones de la cadena, en efecto, recordando que los extremos son casos especiales podemos poner:

$$F_{2,1} - F_1 = M a_1 \quad (54)$$

$$F_{3,2} - F_{1,2} = M a_2 \quad (55)$$

$$F_{4,3} - F_{2,3} = M a_3 \quad (56)$$

...

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = M a_j \quad (57)$$

...

$$F_{N-1,N-2} - F_{N-3,N-2} = M a_{N-2} \quad (58)$$

$$F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} = M a_{N-1} \quad (59)$$

$$F_N - F_{N-1,N} = M a_N, \quad (60)$$

Hasta acá no hay nada más que un lindo conjunto de ecuaciones.

Antes de seguir con el tema que nos interesa, notemos que la cadena es inextensible, lo que implica $a_1 = a_2 = \dots = a_N$, usando este conjunto de igualdades podemos sumar todas las

ecuaciones para obtener

$$\begin{aligned}
& F_N - F_{N-1,N} + F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} + F_{N-1,N-2} + \\
& \quad \dots + F_{j+1,j} - F_{j-1,j} + \dots \\
& + F_{4,3} - F_{2,3} + F_{3,2} - F_{1,2} + F_{2,1} - F_1 = NM a.
\end{aligned} \tag{61}$$

Debido a la tercera ley de Newton esta larguísima suma contiene montones de cancelaciones, por ejemplo $F_{N,N-1} - F_{N-1,N} = 0$, al seguir este conjunto de cancelaciones terminamos con

$$F_N - F_1 = NM. \tag{62}$$

Esto es lindo, la cadena se comporta como una sola partícula de masa NM sobre la que actúan las dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2

Volvamos nuestra atención al tema en que estamos realmente interesados: la construcción de condiciones subsidiarias. Con este objetivo introducimos una hipótesis física, digamos que la masa de los eslabones de la cadena es despreciable ($M \approx 0$). Bajo esta hipótesis el sistema de ecuaciones asociado a la dinámica de los eslabones se simplifica y solo queda

$$F_{2,1} - F_1 = 0 \tag{63}$$

$$F_{3,2} - F_{1,2} = 0 \tag{64}$$

$$F_{4,3} - F_{2,3} = 0 \tag{65}$$

...

$$F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = 0 \tag{66}$$

...

$$F_{N-1,N-2} - F_{N-3,N-2} = 0 \tag{67}$$

$$F_{N,N-1} - F_{N-2,N-1} = 0 \quad (68)$$

$$F_N - F_{N-1,N} = 0, \quad (69)$$

Acaba de ocurrir algo muy bonito, la hipótesis física que introdujimos tiene como consecuencia que las magnitudes de todas las fuerzas del interior de la cadena son iguales ya que $\forall j$ $F_{j+1,j} - F_{j-1,j} = 0$ ó $F_{j+1,j} = F_{j-1,j}$. Como antes podemos sumar todas las ecuaciones para obtener finalmente

$$F_N - F_1 = 0. \quad (70)$$

En otras palabras, la hipótesis de ausencia de masa de los eslabones ha llevado a concluir que las fuerzas que el astronauta ejerce en los extremos de la cadena tienen que ser de la misma magnitud y de sentidos opuestos.

Pensando en las reacciones a estas fuerzas, es decir, en las fuerzas que los extremos de la cadena ejercen sobre las manos del astronauta, podemos decir que, si una cadena tensa sin masa ejerce fuerzas sobre dos objetos colocados en sus extremos estas fuerzas serán de igual magnitud y sentidos opuestos.

Es necesario enfatizar algo, las fuerzas que los extremos de la cadena ejercen sobre los objetos a que están unidos no constituyen pares de acción y reacción.

8.2. La cuerda sin masa

Los resultados de la sección anterior se pueden repetir casi exactamente con una cuerda. Sin embargo, hay un par de modificaciones sobre la que queremos llamar la atención.

La primera de las modificaciones comienza por notar que una cuerda de longitud ℓ se puede pensar como una cadena de eslabones cuyo número crece indefinidamente ($N \rightarrow \infty$) mientras que su longitud ($\Delta\ell$) se hace cada vez menor de manera que el producto $N\Delta\ell$ permanezca constante ($N\Delta\ell = \ell$). Dicho en otros términos, la longitud de cada eslabón se hace infinitesimal y la masa de cada eslabón por separado desaparece como concepto siendo sustituida por una cantidad (μ) que representa la masa por unidad de longitud de cuerda⁷, en términos de μ , la masa de un elemento infinitesimal cuerda de longitud $d\ell$ es infinitesimal y está dada por

$$dm = \mu d\ell. \quad (71)$$

La otra modificación también está relacionada con el cambio de un conjunto discreto de eslabones por un conjunto continuo de puntos en la cuerda. En lugar del índice entero para nombrar a cada eslabón se hace necesario pensar en un número real para asignar un nombre, o lo que es lo mismo, para localizar a cada punto de la cuerda. Sea x este número real. x deberá ser 0 en un extremo de la cuerda y ℓ en el otro. Ahora podemos pensar en un elemento infinitesimal de cuerda uno de cuyos extremos está en la coordenada x mientras que el otro se encuentra en la coordenada $x + dx$, podemos considerar las fuerzas que actúan sobre el elemento de cuerda, escribir las ecuaciones de movimiento para este compararlas con las expresiones que utilizamos para la cadena. Observando que la longitud del elemento de cuerda es dx y considerando que la cuerda se encuentra en un ambiente libre de gravedad, la ecuación de movimiento para la cuerda es

$$\mathbf{T}(x) + \mathbf{T}(x + dx) = \mu \mathbf{a}(x; t) dx. \quad (72)$$

En esta expresión \mathbf{T} es la “tensión” y $\mathbf{a}(x; t)$ es la aceleración del elemento de cuerda.

⁷ μ se denomina densidad lineal de masa

hay que decir más cosas acerca de la tensión...es una fuerza distribuida...como se ejerce...pintar el dibujo...etc

Utilizando una base adecuada los argumentos asociados a la alineación de la cuerda llevan de inmediato a

$$T(x + dx) - T(x) = \mu a dx, \quad (73)$$

ahora bien, podemos reescribir esta ecuación como

$$\frac{T(x + dx) - T(x)}{dx} = \mu a, \quad (74)$$

el lado izquierdo de la igualdad es la derivada de T , de manera, que si la masa por unidad de longitud de la cuerda es cero (aproximación de cuerda sin masa) resulta

$$\frac{dT(x)}{dx} = 0, \quad (75)$$

es decir, la magnitud de la tensión es la misma a lo largo de toda la cuerda.

8.3. Poleas

Las poleas son “máquinas simples” de gran aplicabilidad. En primera aproximación podemos modelar a las poleas como objetos no solo carentes de radio sino carentes de masa, esta aproximación tiene una consecuencia que no es posible demostrar con los elementos a nuestra disposición pero que será explicada con todo detalle cuando estudiemos la mecánica de los cuerpos rígidos. La consecuencia es la siguiente:

Una polea sin masa permite modificar la dirección en que una cuerda ideal que pasa a través de la polea puede aplicar tensión sin causar cambio alguno en la magnitud de la tensión en punto alguno de la cuerda.

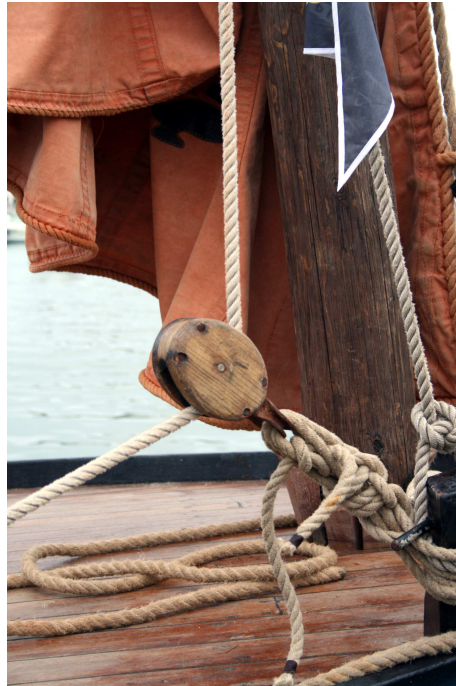


Figura 3: Las poleas son máquinas simples de uso sumamente extendido, en esta figura vemos una aplicación náutica en que la polea se está utilizando para cambiar la dirección de una tensión

9. Más aplicaciones de las leyes de Newton

En esta sección presentaremos varios ejemplos en que aplicaremos todas las ideas que hemos discutido hasta este punto, vínculos y condiciones dinámicas. Como siempre, le recomendamos seguir estos ejemplos juiciosamente.

Ejemplo 6 *En la figura no hay roce entre la mesa y la masa que se encuentra colocada sobre ella. Encuentre la aceleración del bloque atado a la cuerda Sobre m_1 solo actúan la atracción gravitacional de la tierra (\mathbf{T}_1) y la tensión \mathbf{T}_1). Por otra parte, las fuerzas que actúan sobre el*

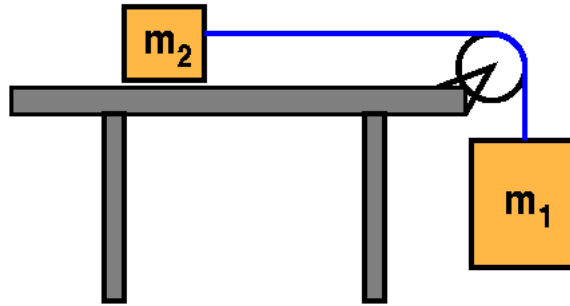


Figura 4:

bloque que se encuentra sobre la mesa son: la tensión (\mathbf{T}_2) que la cuerda ejerce sobre el bloque, su peso (\mathbf{W}_2) y la fuerza de contacto que la mesa ejerce sobre m_2 ($\mathbf{\Lambda}$). En consecuencia, las ecuaciones de movimiento vectoriales de ambos cuerpos son

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{a}_2 \quad (76)$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{W}_1 = m_1 \mathbf{a}_1. \quad (77)$$

Consideremos ahora un par de vectores ortonormales $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ (paralelo a la mesa y orientado hacia la derecha de la figura y $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ vertical y orientado hacia arriba. Con esta base del plano las fuerzas y aceleraciones se expresan como

$$\mathbf{a}_2 = a_2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \quad (78)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \lambda_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \lambda_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (79)$$

$$\mathbf{W}_2 = -m_2 g \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (80)$$

$$\mathbf{T}_2 = T_2 \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \quad (81)$$

$$\mathbf{a}_1 = a_1 \hat{\mathbf{e}}_{\perp} \quad (82)$$

$$\mathbf{T}_1 = T_1 \hat{\mathbf{e}}_\perp \quad (83)$$

$$\mathbf{W}_1 = -m_1 g \hat{\mathbf{e}}_\perp \quad (84)$$

Donde las componentes T_1 , T_2 , λ_\parallel , λ_\perp , a_1 y a_2 son números reales por determinar.

Ahora bien, como no hay fricción entre el bloquecito y la superficie $\lambda_\parallel = 0$, además, al considerar el vínculo de inextensibilidad $a_1 = -a_2 = a$, finalmente, la hipótesis de cuerda muy ligera (sin masa) implica $T_2 = T = T_1$. Sustituyendo estos resultados intermedios obtenemos

$$\Lambda_\perp - m_2 g = 0 \quad (85)$$

$$T = m_2 a \quad (86)$$

$$T - m_1 g = -m_1 a; \quad (87)$$

en definitiva,

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g. \quad (88)$$

En términos vectoriales, la aceleración de la masa que cuelga de la cuerda es

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} g \hat{\mathbf{e}}_\perp, \quad (89)$$

vale la pena discutir algunos límites, si $m_2 \rightarrow 0$ la masa que cuelga (m_1) se comporta como si estuviera en caída libre. Mucho más interesante es el caso en que m_2 se hace muy grande, en efecto, reescribiendo a en la forma

$$a = \frac{m_1}{m_2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)} g, \quad (90)$$

se hace evidente que si m_2 se hace muy grande muy respecto a m_1 la expresión queda como

$$a = \frac{m_1}{m_2} g \rightarrow 0, \quad (91)$$

resultado que es esperable porque la masa no es otra cosa que la resistencia a ser acelerado.

Podemos pensar en muchísimas variantes del ejemplo anterior. Comentaremos algunas.

Ejemplo 7 *En la situación de la figura 4 el sistema permanece en reposo. ¿Cuál será la fuerza de roce que la masa m_1 ejerce sobre la mesa?*

En este caso, las ecuaciones de movimiento en forma vectorial son exactamente iguales a las del ejemplo 6. Ahora bien, las aceleraciones de ambas partículas son nulas y tenemos que mantener la componente $\lambda_{||}$ de la reacción sobre la masa m_1 , de acuerdo a esto, las ecuaciones de movimiento en forma escalar son

$$\Lambda_{\perp} - m_2g = 0 \quad (92)$$

$$T + \lambda_{||} = 0 \quad (93)$$

$$m_1g - T = 0 \quad (94)$$

y de allí podemos encontrar de inmediato:

$$\lambda_{\perp} = m_2g\lambda_{||} = -m_1g \quad (95)$$

ahora bien Λ es la reacción que la mesa ejerce sobre m_2 , de manera que $-m_1g\hat{e}_1$ es el roce que la mesa ejerce sobre m_2 , en consecuencia el roce que m_2 ejerce sobre la mesa es $m_1g\hat{e}_1$

Ejemplo 8 *Otra variante del ejemplo 6 en que podemos pensar consiste en sustituir la mesa por una superficie sin rozamiento que forma un ángulo θ con la horizontal. Una vez más las ecuaciones vectoriales son idénticas*

$$\mathbf{\Lambda} + \mathbf{W}_2 + \mathbf{T}_2 = m_2\mathbf{a}_2 \quad (96)$$

$$\mathbf{T}_1 + \mathbf{W}_1 = m_1\mathbf{a}_1 \quad (97)$$

la modificación se hace manifiesta al utilizar la forma escalar de estas ecuaciones. Al descomponer la primera ecuación en sus componentes paralela y ortogonal a la superficie (\mathbf{e}_{\parallel} es en sentido de subida y \mathbf{e}_{\perp} apunta hacia la “arriba” resulta

$$\lambda_{\parallel} - m_2 g \sin\theta + T = m_2 a_{\parallel} \quad (98)$$

$$\lambda_{\perp} - m_2 g \cos\theta = 0 \quad (99)$$

$$T - m_1 g = m_1 a_1 \quad (100)$$

Acá hemos usado que la magnitud de las tensiones es la misma en ambos extremos de la cuerda y hemos sido consistentes en que $\hat{b}f\mathbf{e}_y$ es un versor antiparalelo a la gravedad.

Una vez más, el vínculo de inextensibilidad implica $a_{\parallel} = -a_1 = a$ lo que nos deja con

$$\lambda_{\parallel} - m_2 g \sin\theta + T = m_2 a \quad (101)$$

$$\lambda_{\perp} - m_2 g \cos\theta = 0 \quad (102)$$

$$T - m_1 g = -m_1 a \quad (103)$$

al imponer la condición de roce cero obtenemos finalmente:

$$m_1 g - m_2 g \sin\theta = (m_1 + m_2) a \quad (104)$$

es decir

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin\theta}{m_1 + m_2} g. \quad (105)$$

Acá hay dos casos límites de interés, cuando $\theta \rightarrow 0$ se recupera el ejemplo 6, el caso $\theta \rightarrow 90^\circ$ debería corresponder a dos masas que cuelgan de una cuerda que pasa por una polea (estudie ese problema y verifique lo que acabamos de decir.

Ejemplo 9 La figura *xxxx* Muestra un sistema compuesto por dos bloques y un par de poleas. Las masas de los bloques son M_1 (el bloque que desliza sobre el plano inclinado) y M_2 *blah blah...*

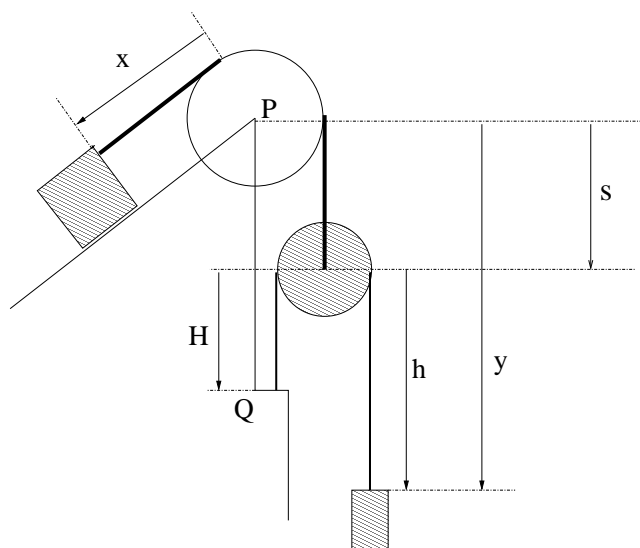


Figura 5: *xxxxxxx*

Para resolver el problema debemos comenzar por notar ciertas relaciones geométricas

$$h + H = \ell_2 \tag{106}$$

$$x + s = \ell_1 \tag{107}$$

$$H + s = PQ \quad y \tag{108}$$

$$y - s = h \tag{109}$$

Al sustituir 106 y 108 en 109 obtenemos

$$y = 2s + \ell_2 - PQ \tag{110}$$

que gracias a 107 implica el vínculo

$$y = -2x + \ell_2 - \ell_1 - PQ \quad (111)$$

que tratado adecuadamente da como resultado la siguiente relación

$$\ddot{y} = -2\ddot{x} \quad (112)$$

xxxxxxx

$$M_1 g \sen\theta - T_1 = M_1 \ddot{x} \quad (113)$$

$$M_2 g - T_2 = M_2 \ddot{y} \quad (114)$$

$$T_1 - 2T_2 = M_p \ddot{s} \quad (115)$$

En la aproximación en que la masa de la polea ($M_p = 0$), las tensiones obedecen la relación.

Finalmente, utilizando que $M_2 = \eta M_1$

$$M_1 g \sen\theta - T_1 = M_1 \ddot{x} \quad (116)$$

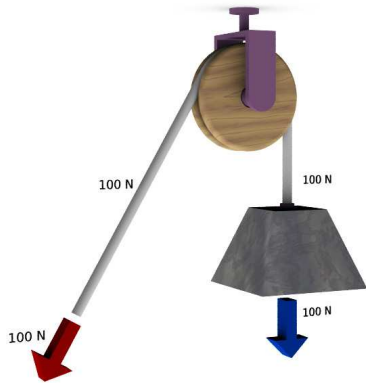
$$\eta M_1 g - \frac{T_1}{2} = -2\eta M_1 \ddot{x} \quad (117)$$

de donde obtenemos finalmente,

$$\ddot{x} = -\frac{2\eta - \sen\theta}{4\eta + 1} g \quad (118)$$

9.1. Poleas y ventaja mecánica

Como ya hemos comentado, las poleas son máquinas simples (en el mismo sentido en que lo son las palancas).



La polea fija es la configuración más elemental que existe. Un cálculo elemental demuestra que (en la aproximación de polea sin masa) la fuerza con que hay que halar de la cuerda es igual al peso del objeto que se desea elevar, a pesar de esto el uso de la polea permite aplicar la fuerza en una dirección más conveniente que la vertical pura que habría que utilizar para levantar el peso sin el uso de la polea.

La polea móvil es una configuración mucho más interesante que de hecho ya estudiamos en el ejemplo 9. Una vez más la aproximación de ausencia de masa permite demostrar que la fuerza que se requiere para levantar un peso de magnitud W es de magnitud $F = W/2$. A la relación W/F se le denomina ventaja mecánica, y para la polea simple móvil es 2 (podemos levantar algo cuyo peso supere en un factor de 2 a la mayor fuerza que podamos ejercer).



La idea de la polea móvil puede generalizarse conectando varias poleas en una configuración sumamente interesante conocida como polipasto (del latín *polypaston*) o aparejo, un polipasto consiste en dos grupos de poleas, uno de poleas fijas y otro de poleas móviles del que se cuelga la carga que deseamos levantar. No debería ser difícil notar que la ventaja mecánica de un polipasto es igual al número de segmentos de cuerda que pasan por las poleas móviles. Por

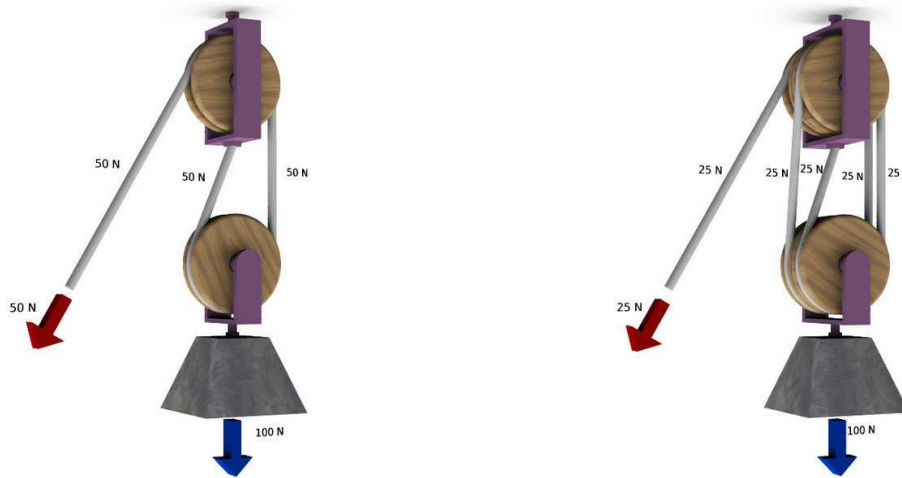


Figura 6: Un polipasto simple y uno doble. Las ventajas mecánicas son 2 y 4 respectivamente supuesto que uno debe pagar un precio por la ventaja mecánica, el precio está relacionado con el vínculo de inextensibilidad de la cuerda, la velocidad con la que sube la carga está en proporción inversa a la ventaja mecánica (porque para que la carga se eleve una longitud s el punto de aplicación de la fuerza debe desplazarse N veces s donde N es el número de segmentos de cuerda que pasan por el grupo móvil).

9.2. Rozamiento

.....